

Correction examen blanc

Exercice1

1) on a $\overrightarrow{AB}(0,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq 0$ donc A, B, C ne sont pas alignés.

2) on a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Donc l'équation de (ABC) s'écrit sous la forme $x + y + z + d = 0$; $d \in \mathbb{R}$

$$A(1,0,1) \in (ABC) \Rightarrow 1 + 0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

D'où l'équation de (ABC) : $x + y + z + 2 = 0$.

3)a) on a $P \perp (ABC)$ et (AB) incluse dans P. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont 2 vecteurs directeurs de P.

D'où $\vec{n} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \wedge \overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan P

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Donc les coordonnées : $\vec{n}(-2,1,1)$

b) l'équation de P s'écrit sous la forme : $-2x + y + z + d = 0$

$$A(1,0,1) \in P \Rightarrow -2 + 0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = 1 \quad \text{Donc } -2x + y + z + 1 = 0$$

$$4)a) R = d(c; p) = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$b) \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ et } -2x + y + z + 1 = 0 \Leftrightarrow 4t + 1 + t + 1 + t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1; y = \frac{1}{2}; z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc : } E\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Exercice2

1) on suppose que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure αi tel que $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\alpha^3 i - (2 - i)\alpha^2 + 2\alpha i (1 - i) - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2\alpha^2 + 2\alpha) + (-\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha^2 + 2\alpha = 0 \\ -\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \\ 0 \text{ n'est pas une solution} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Donc i est la solution

$$2)(z-i)(z^2+2z+2) = z^3 + 2z^2 + 2z - iz^2 - 2iz - 2i$$

$$= z^3 + (2-i)z^2 + (2-2i)z - 2i = P(z)$$

$$3)* P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i, z^2 + 2z + 2 = 0 ;$$

$$\Delta = -4 = (2i)^2 \Rightarrow z_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i; z_2 = \bar{z}_1 = -1+i$$

$$S = \{i; -1-i; -1+i\}$$

$$* i = \left[1; \frac{\pi}{2}\right]; -1+i = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]; -1-i = \left[\sqrt{2}; \frac{-3\pi}{4}\right]$$

$$4) a) \frac{b-a}{c-a} = \frac{-1-i+1-i}{i+1-i} = -2i$$

$$b) \frac{b-a}{c-a} = -2i \Rightarrow \frac{b-a}{c-a} = \left[2; \frac{-\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} |b-a| = 2|c-a| \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2AC \\ ABC \text{ est rectangle en } A \end{cases}$$

Exercice3

$$1) \text{card } \Omega = 6^2 = 36; P = \frac{3^2+2^2+1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$2) P = \frac{3^2+2^2+1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$$3) a) P(X=0) = P(OO \vee O\bar{O}) = \frac{2^2+2 \times 2^1 \times 4^1}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$b) X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}; P(X=0) = \frac{5}{9}$$

$$P(X=1) = P("11") = \frac{3^2}{36} = \frac{1}{4}; P(X=4) = \frac{1^2}{36} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Methode1: } P(X=2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=4)) = 1 - \frac{20}{36} - \frac{10}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Methode2: } P(X=2) = P("21") = \frac{2 \times 1^1 \times 3^1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

x	0	1	2	4	
P(X=x)	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	1

Exercice4

Partie1

$$1) f \text{ est dérivable sur son domaine de définition et surtout sur } I \text{ et } \forall x \in I; f'(x) = \frac{16}{(5-x)^2} > 0$$

Donc la fonction est strictement croissante et continue sur I

$$f(I) = [f(1); f(2)] = \left[1; \frac{5}{3}\right] \subset I$$

$$2) f(x) - x = \frac{x+3}{5-x} - x = \frac{x^2-4x+3}{5-x} = \frac{(x-1)(x-3)}{5-x}$$

$$5-x > 0 \text{ et } x-3 < 0; x-1 \geq 0$$

$$\text{Donc } f(x) - x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq x$$

Partie2

1) pour $n = 0$ on a $U_0 = 2$ donc vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $U_n \in I$ montrons que $U_{n+1} \in I$

On a $U_n \in I$ et d'après la question 1) de la partie1 on a $f(U_n) \in I$ donc $U_{n+1} \in I$

2) * $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$ on a $U_n \in I$ et d'après la question 2) de la partie1 on a $f(U_n) \leq U_n$

Donc la suite est décroissante.

* (U_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente.

3) on a $\forall n \in \mathbb{N} f(U_n) = U_{n+1}$ et :

* f est continue sur I * $f(I) \subset I$ * $U_0 \in I$ * (U_n) est convergente

Donc la limite de la suite est une solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{5-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

On a $3 \notin I$, $1 \in I$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$.

Partie3

$$1) W_{n+1} = \frac{U_{n+1}-3}{1-U_{n+1}} = \frac{\frac{U_n+3}{5-U_n}-3}{1-\frac{U_n+3}{5-U_n}} = \frac{U_n+3-15+3U_n}{5-U_n-U_n-3} = \frac{-12+4U_n}{2-2U_n} = 2 \frac{-3+U_n}{1-U_n} = 2W_n$$

Donc (W_n) est géométrique de raison 2

$$W_0 = \frac{U_0-3}{1-U_0} = 1 \Rightarrow W_n = W_0 \times q^n = 2^n$$

$$\begin{aligned} 2) * W_n &= \frac{U_n-3}{1-U_n} \Leftrightarrow W_n - U_n W_n = U_n - 3 \\ &\Leftrightarrow -U_n(W_n + 1) = -3 - W_n \\ &\Leftrightarrow U_n = \frac{3+W_n}{W_n+1} = \frac{3+2^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \left(\frac{3}{2^n} + 1 \right) = 1$$

Probleme

$$1) X^2 - 4X + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow X_2 = 3 ; X_1 = 1$$

$$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 3$$

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$e^{2x} - 4e^x + 3$	+	0	0	+

$$x \in Df \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0[\cup]\ln 3 ; +\infty[$$

$$2) \lim_{(\ln 3)^+} f(x) = \lim_{(\ln 3)^+} \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln(0^+) = -\infty$$

Donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation : $x = \ln 3$

$$\lim_{(0)^-} f(x) = \lim_{(0)^-} \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln(0^+) = -\infty$$

Donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$

$$3) \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \lim_{+\infty} \ln\left(e^x \left(e^x - 4 + \frac{3}{e^x}\right)\right) = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln 3$$

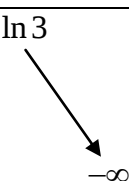
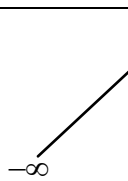
$$4) a) f'(x) = \frac{(e^{2x} - 4e^x + 3)'}{e^{2x} - 4e^x + 3} = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} = \frac{2e^x(e^x - 2)}{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

b) $f'(x)$ et $(e^x - 2)$ ont même signe

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

Donc $f'(x) > 0$ sur $]\ln 3; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; 0[$

c)

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$\ln 3$	$+\infty$
f'	-				+
f	$\ln 3$ 				$+\infty$ 

5) *on a f est strictement décroissante et continue sur $] -\infty; 0[$

$$f(] -\infty; 0[) =] -\infty; \ln 3[\text{ Donc } 0 \in f(] -\infty; 0[)$$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $] -\infty; 0[$

*On a f est strictement croissante et continue sur $]\ln 3; +\infty[$

$$f(]\ln 3; +\infty[) = \mathbb{R} \text{ Donc } 0 \in f(]\ln 3; +\infty[)$$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]\ln 3; +\infty[$

$$* f(-1) = 4(e^{-2} - 4e^{-1} + 3) = 4\left(\frac{1}{e^2} - \frac{4}{e} + 3\right)$$

$$\frac{1}{e^2} - \frac{4}{e} + 3 - 1 = \frac{1}{e^2} - \frac{4}{e} + 2 = \frac{1 - 4e + 2e^2}{e^2} = \frac{1 + e(2e - 4)}{e^2} ; 2e - 4 > 0$$

$$\frac{1}{e^2} - \frac{4}{e} + 3 > 0 \Rightarrow f(-1) > 0$$

Donc $f(-1) > f(\alpha)$ et on a f est décroissante sur $] -\infty; 0[$ donc $-1 < \alpha < 0$

$$* f(2) = \ln(e^4 - 4e^2 + 3) = \ln(e^2(e^2 - 4) + 3) ; e^2 - 4 > 0 \Rightarrow f(2) > 0$$

Donc $f(2) > f(\beta)$ et on a f est croissante sur $]\ln 3; +\infty[$ donc $\ln 3 < \beta < 2$

$$6) a) \lim_{+\infty} f(x) - 2x = \lim_{+\infty} \ln \left(e^{2x} \left(1 - \frac{4}{e^2} + \frac{3}{e^{2x}} \right) \right) - 2x = \lim_{+\infty} \ln \left(1 - \frac{4}{e^2} + \frac{4}{e^{2x}} \right) = 0$$

Donc (Δ) est une asymptote oblique de $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$

b) on a $\lim_{-\infty} f(x) = \ln 3$ donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale

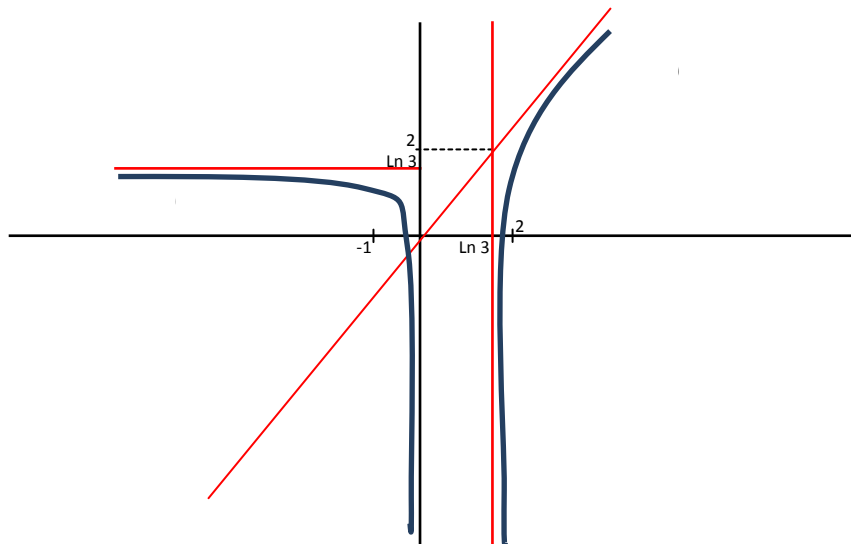
D'équation $y = \ln 3$ au voisinage de $-\infty$

$$7) a) f(x) = 2x \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 4e^x + 3) = \ln e^{2x} \Leftrightarrow -4e^x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \ln \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$\ln \frac{3}{4}$	0	$\ln 3$	$+\infty$
$f(x) - 2x$	+	0	-		-
Position relative	$\mathcal{C}$ au-dessus de (Δ)	$\mathcal{C}$ au-dessous de (Δ)			$\mathcal{C}$ au-dessous de (Δ)

b)



8) a) g continue et strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1}

Définie sur l'intervalle J tel que

$$J = g(I) =] -\infty ; 0[$$

b) on a $g(\alpha) = 0$ et $\alpha \in] -\infty ; 0[$

$$\text{Donc } g^{-1}(0) = \alpha$$

On a $g'(\alpha) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en 0 et $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)}$