

Bac blanc 2017/2018

Matière : Mathématiques	Niveau: 2Sc Math
Coefficient : 9	Durée : 4 heures

- La durée de l'épreuve est 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat .

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.....(4,5pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.....(2pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3,5pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse (fonction et suite implicite).....(6,5pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse (fonction définie par intégrale).(3.5pts)

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Exercice 1) 4 ;5 points

On rappelle que $(\mathbb{C}; +; \times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

Soient α une solution dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ et

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \{a + b\alpha / (a; b) \in \mathbb{Q}^2\}.$$

On pose $(\mathbb{Q}[\alpha])^* = \mathbb{Q}[\alpha] - \{0\}$

(On ne demande pas de trouver la valeur de α)

Partie I)

0.5

1) Montrer que $(\mathbb{Q}[\alpha]; +)$ est groupe commutatif.

0.5

2) Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une partie stable de $(\mathbb{C}; \times)$.

0.25

3) a- Montrer que $(\forall (a; b) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}; a^2 - ab + b^2 \neq 0)$.

0.25

b- Montrer que $(\forall (a; b) \in \mathbb{Q}^2; a + b\alpha = 0 \Leftrightarrow (a; b) = (0; 0))$. (remarquer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$)

0.25

c- Vérifier que l'inverse de tout élément $a + b\alpha$ de $(\mathbb{Q}[\alpha])^*$ est :

$$\frac{a - b}{a^2 - ab + b^2} + \frac{-b}{a^2 - ab + b^2} \alpha.$$

0.5

4) Montrer que $(\mathbb{Q}[\alpha]; +; \times)$ est un corps commutatif.

Partie II)

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$F = \left\{ M(a; b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a - b \end{pmatrix} = aI_2 + bA / (a; b) \in \mathbb{Q}^2 \right\}.$$

0.25

1) Vérifier que $A^2 + A + I_2 = 0_2$ et déduire que A est inversible.

2) Soient f l'application $f: \mathbb{Q}[\alpha] \rightarrow F$

$$a + b\alpha \mapsto M(a; b) = aI_2 + bA.$$

0.5

a- Montrer que f est une bijection .

0.25

b- Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{Q}[\alpha]; +)$ vers $(F; +)$.

0.25

c- Montrer que f est un homomorphisme de $(\mathbb{Q}[\alpha]; \times)$ vers $(F; \times)$.

0.5

d- Déduire la structure de $(F; +; \times)$.

3) On prend $\alpha = j$ ($j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$).

0.5

Déterminer la matrice A^{2018} . (on rappelle que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$)

Exercice 2) 2 points.

0.5

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); \begin{cases} 4^n \equiv 1[3] \\ 4^{4n} \equiv 1[17] \end{cases}$.

0.25

2) Montrer que $4^{28} \equiv 1[29]$.

0.25

3) Résoudre dans \mathbb{N} l'équation de congruence suivante $4^n \equiv 1[5]$.

0.25

4) Déduire quatre diviseurs premiers positifs de $4^{28} - 1$.

5) Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$.

0.25
0.5

a- Montrer que $(\exists n \in \mathbb{N}^*) / 4^n \equiv 1[p]$.

b- Soit m le plus petit entier naturel non nul vérifiant $4^m \equiv 1[p]$.

Montrer que $p-1 \equiv 0[m]$.

Exercice 3) 3.5 points

Dans tout l'exercice on considère un nombre complexe a différent de 1 ; i et -i .

Partie I)

On considère l'équation (E) : $iz^2 + (1-i)(1+a)z - (a^2+1) = 0$.

0.25
0.25
0.25

1) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta = 2i(a-1)^2$.

2) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E) .

3) Etablir que $z_1 z_2 \neq 0$ et montrer que $z_2 \neq \bar{z}_1$.

Partie II)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O; \vec{u} ; \vec{v}).

On considère les points A(a) ; B(a+i) ; C(1+ai) ; D((a+i)^2) et E $\left(\frac{(a+i)^2 - ai}{1-i}\right)$.

0.5
0.5
0.5
0.75
0.5
0.5

1) Déterminer l'ensemble des points A(a) pour lesquels les points O ; B et C sont alignés.

2) Montrer que C est l'image de A par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre à déterminer.

3) On suppose dans ce qui suit que $|a| = 1$ et que $a^2 - 1 \neq (1-2i)a$.

a- Vérifier que $A \neq D$; $A \neq E$ et $D \neq E$.

b- Montrer que ADE est un triangle rectangle isocèle en E .

c- Montrer que les points O ; A ; D et E sont cocycliques.

Exercice 4) 6.5 points.

Partie I)

Soit pour tout n de \mathbb{N}^* la fonction définie par $h_n(x) = x + n \left(-1 + \frac{1}{2} \ln x\right)$.

0.25
0.5
0.5
0.5

1) Etudier les variations de h_n .

2) Montrer que l'équation $h_n(x) = 0$ admet une seule solution u_n dans $]0; +\infty[$ et que $1 \leq u_n < e^2$.

3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$.

4) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\ln(u_n) - 2)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Partie II)

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

0.75
0.5
0.75

1) Etudier les branches infinies de la courbe (C) de f.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ est celui de $h_1(x)$.

3) a- Montrer que $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} - 2$ et $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} \ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$

0.5

b- Dédurre la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $(\forall n \geq 1); S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{n+k}{n}\right)$.

Partie III)

Soit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $(\forall n \geq 0); \begin{cases} v_{n+1} = h_2(v_n) - v_n + 3; n \geq 0 \\ v_0 > 1 \end{cases}$.

0.25

1) a- Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = 1 + \ln(v_n)$

0.5

b-Dédurre que $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n > 1$.

0.5

2)a- En utilisant le théorème des accroissements finis ;montrer que $(\forall x > 1); \ln x < x - 1$

0.5

b-Dédurre que $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

0.5

3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

.....

Exercice 5) 3.5points.

Soit la fonction définie par $F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{t^2} dt$.

0.5

1) Montrer que le domaine de définition de F est $D_F =]1; +\infty[$.

0.5

2) a- Montrer que $(\forall x \in]1; e[); F(x) \leq x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)$.

0.5

b- Dédurre $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.

0.5

3) a- Montrer que $(\forall x \in]e; +\infty[); F(x) \geq \frac{x - e}{(\ln x)^2}$.

0.5

b- Dédurre $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

0.5

4) a- Montrer que F est dérivable sur $]1; +\infty[$ et déterminer $F'(x)$ pour tout x de $]1; +\infty[$.

0.5

b- Donner le tableau de variation de F.